

Оптимальное управление в микроструктуре рынка

Дмитрий Шатилович¹, Петр Шкенов², Олег Бабурин³, и Старощук Богдан⁴

¹Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

²Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

³Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

⁴Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

Понимание того, как торгуют участники рынка, важно для анализа рынка ценных бумаг. Практика торговли показывает, что рынок ценных бумаг не является абсолютно эластичным. Ограниченная эластичность спроса/предложения или ликвидности может существенно повлиять на действия участников рынка, что, в свою очередь, может повлиять на спрос/предложение и цены. В данной работе мы рассмотрим проблему нахождения оптимальной стратегии исполнения заданного ордера, которую также называют проблемой оптимального исполнения. С такой проблемой сталкиваются институциональные инвесторы, которым необходимо выполнять крупные заказы и часто прерывать сделки, чтобы управлять торговыми издержками.

Задача оптимального исполнения поднималась в нескольких работах. Bertsimas и Lo¹ предложили статическую функцию влияния цены и определили оптимальную стратегию исполнения, исходя из минимизации ожидаемых затрат на выполнение данного ордера.

Almgren и Chriss² построили модель, в которой влияние сделки на цену описывается статической функцией влияния цены. Эта функция зависит только от размера сделки и не отражает межвременные свойства спроса/предложения на ценную бумагу. Кроме того, в модели время определено дискретным образом, то есть время для торговли устанавливается с определенными интервалами, что не позволяет определить оптимальное время совершения сделок.

В работе Obizhaeva и Wang³ предложена модель, включающая меж-

¹Bertsimas D., Lo A. W. Optimal control of execution costs //Journal of financial markets. 1998. Т. 1. №1. С. 1–50.

²Almgren R., Chriss N. Value under liquidation //Risk. 1999. Т. 12. №12. С. 61–63.

³Obizhaeva A. A., Wang J. Optimal trading strategy and supply/demand dynamics //Journal of Financial markets. 2013. Т. 16. №1. С. 1-32.

временные свойства в структуру рынка. При оптимальном выборе времени для совершения сделок оптимальная стратегия исполнения в данной модели значительно отличается от предложенных в предыдущих работах. Эта модель включает в себя сочетание дискретных и непрерывных сделок. Для описания динамики спроса и предложения используется книга лимитных ордеров, причём оптимальная стратегия обычно предполагает сначала дискретную сделку, которая отклоняет книгу лимитных ордеров от его стабильного состояния. Такое отклонение привлекает новые ордера в книгу. Начальный размер сделки выбирается таким образом, чтобы привлечь достаточное количество новых ордеров по желаемым ценам. Затем следует набор непрерывных сделок, чтобы отобрать новые ордера и сохранить приток в книгу. В конце торгового периода выполняется заключительная сделка для завершения всех оставшихся ордеров. Такой вид оптимальной стратегии приводит к интересным выводам о динамике объема торгов, ликвидности и цен на ценные бумаги.

В данной работе модель Обижаевой-Ванга расширена в двух направлениях: добавлены снос фундаментальной части цены и неравномерность распределения книги ордеров. Это приводит к задаче импульсного оптимального управления. В работе найдена стратегия покупки, удовлетворяющая необходимым условиям оптимальности, а также исследована зависимость этой стратегии от коэффициента нелинейности. В частности, показано, что наличие положительного сноса приводит к увеличению величины начальной покупки и уменьшению последующих покупок. А возрастание объема заявок по цене может сделать оптимальной одномоментную закупку всего требуемого объема. Кроме того, в работе доказан принцип максимума для задачи импульсного оптимального управления в специальном случае.

Работа сделана при поддержке Фонда «Институт «Вега».

Список литературы

- [Bla77a] A. Blaquiere. «Necessary and sufficient conditions for optimal strategies in impulsive control and application». В: *New trends in dynamic system theory and economics* (1977), с. 183–213.
- [Bla77b] A. Blaquière. «Differential games with piece-wise continuous trajectories». В: *Differential Games and Applications*. Под ред. P. Hagedorn, H. W. Knobloch и G. J. Olsder. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1977, с. 34–69. ISBN: 978-3-540-37179-3.

- [Bla79] A. Blaquière. *Necessary and Sufficient Conditions for Optimal Strategies in Impulsive Control and Applications, New Trends in Dynamic System Theory and Economics*, Edited by M. Aoki and A. Marzollo. 1979.
- [Пон+83] Лев Сергеевич Понтрягин и др. *Математическая теория оптимальных процессов*. Наука, 1983.
- [Bla85] A. Blaquiere. «Impulsive optimal control with finite or infinite time horizon». В: *Journal of optimization theory and applications* 46 (1985), с. 431—439.
- [SS86] Atle Seierstad и Knut Sydsaeter. *Optimal control theory with economic applications*. Elsevier North-Holland, Inc., 1986.
- [HF87] Richard F Hartl и Gustav Feichtinger. «A new sufficient condition for most rapid approach paths». В: *Journal of Optimization Theory and Applications* 54 (1987), с. 403—411.
- [RZ88] R Rempala и J Zabczyk. «On the maximum principle for deterministic impulse control problems». В: *Journal of optimization theory and applications* 59.2 (нояб. 1988), с. 281—288.
- [CHK12] Mohammed Chahim, Richard F Hartl и Peter M Kort. «A tutorial on the deterministic impulse control maximum principle: necessary and sufficient optimality conditions». В: *European Journal of Operational Research* 219.1 (2012), с. 18—26.
- [OW13] Anna A Obizhaeva и Jiang Wang. «Optimal trading strategy and supply/demand dynamics». В: *Journal of Financial markets* 16.1 (2013), с. 1—32.
- [Бел20] А. О. Беляков. «О достаточных условиях оптимальности для задач оптимального управления с бесконечным горизонтом времени». В: *Труды Математического института имени В. А. Стеклова* 308 (2020), с. 65—75.