

Устойчивое коалиционное разбиение для трансверсальных проблем

В. В. Гусев
НИУ ВШЭ - Санкт-Петербург

Многие субъекты в экономике, менеджменте, социологии и других областях имеют квалификацию. Агенты развиваются в конкретном направлении и становятся специалистами в своей области. Однако, для выполнения некоторых проектов или заданий, представителям различных квалификаций или групп приходится кооперироваться друг с другом. Каждый член коалиции выполняет вид работы, которая является его специализацией. Далее, система различных представителей получает некоторую полезность. Система различных представителей или трансверсаль это коалиция агентов из разных групп. Предположим, что мы имеем две группы: теоретики и прикладники. Тогда теоретик и прикладник, работая совместно, могут развить приложение некоторой теории. Коалиция из теоретика и прикладника это трансверсаль. Покупатель и продавец, источник и приёмник так же являются примерами трансверселей. Для проведения медицинской операции нужен хирург, анестезиолог и медицинская сестра. Это пример трансверсали из трех субъектов. Агент получает полезность только в том случае, если он состоит в некоторой трансверсали.

Формально, пусть N это непустое конечное множество агентов и $\pi = \{B_1, B_2, \dots, B_l\}$ это разбиение агентов на попарно не пересекающиеся не пустые группы. Тогда трансверсаль разбиения π это коалиция $K = \{t_1, t_2, \dots, t_l\}$, где $t_j \in B_j \forall j \in \{1, 2, \dots, l\}$. Рассмотрим две ситуации в которых трансверсали играют важную роль:

1. Формирование рабочих групп. Пусть N это множество работников и l это количество работ, которые нужно выполнить для реализации одного проекта. Рабочих нужно распределить на l групп, причём с каждой группой ассоциируется один тип работ. Тогда трансверсаль сформировавшегося разбиения это минимальная коалиция рабочих, которая может выполнить проект.
2. Назначение председателей. В некотором учреждении нужно сформировать l комиссий, причём один и тот же человек не может состоять в двух комиссиях одновременно. Требуется из состава каждой комиссии назначить их председателей. В таком случае коалиция председателей это трансверсаль коалиционного разбиения.

При формировании рабочих групп может сформироваться любое разбиение из l не пустых коалиций, то есть $|\pi| = l$. Далее, рабочие образуют трансверсали и получают от этого некоторую полезность. Каждый рабочий заинтересован в том, чтобы от сформировавшегося разбиения получить наибольшую выгоду. До формирования трансверселей рабочие могут переходить между коалициями разбиения. Это означает, что рабочий сменил один вид работы на другой. В таком случае возникает вопрос существования устойчивой коалиционной структуры. Аналогичная проблема есть в задаче председателей из-за того, что каждый агент заинтересован быть лидером от своей комиссии.

Чтобы определить полезность коалиции, в работе используются методы кооперативной теории игр. Для кооперативной игры с коалиционной структурой вводится трансверсальное значение. Трансверсальное значение игрока $i, i \in N$ это сумма значений тех трансверселей разбиения π , в которые входит игрок i . Значения коалиций определяет характеристическая функция $v, v : 2^N \rightarrow R$, которая дана до формирования коалиционного разбиения. Особенность трансверсального значения игрока i в том, что оно не зависит от игроков, которые находятся вместе с ним в одной коалиции. Это существенное отличие от многих других теоретико-игровых моделей.

Вводится игра формирования рабочих групп и игра председателей. Это новые игры коалиционного разбиения, в которых выигрыши игроков выражаются через трансверсальное значение.

В игре формирования рабочих групп игроки это владелец фирмы и ее рабочие. Рабочие игроки формируют коалиционное разбиение, причём владелец фирмы не является его частью. Характеристическая функция v показывает количество проектов, которые может выполнить коалиция K , $K \subseteq N$. Когда разбиение сформировано, то рабочие игроки образуют трансверсали чтобы выполнять проекты. Владелец фирмы за выполнение любого проекта получает некоторую денежную сумму. Далее, он платит вознаграждение рабочим за реализованные проекты, в которых они участвовали. Показано, что в игре формирования рабочих групп существует Pareto-Nash устойчивая коалиционная структура. Это означает, что рабочих игроков можно так распределить на фиксированное число групп, что никто из них не захочет по одиночке переходить в другие группы и выигрыш владельца фирмы максимален.

В игре председателей характеристическая функция это априорная вероятность того, что некоторая коалиция это коалиция лидеров. Каждый игрок заинтересован в таком разбиении, чтобы его шансы быть председателем были высоки. Выигрыш игрока в игре председателей это вероятность стать лидером от своей коалиции, при условии, что сформировано разбиение π . Можно сказать, что мы рассматриваем случайную величину, которая принимает значения 1 (игрок председатель) и 0 (игрок не председатель). Тогда математическое ожидание такой случайной величины это вероятность быть лидером. Показано, что в игре председателей существует устойчивая по Нэшу коалиционная структура.

Функции выигрышей игроков в игре формирования рабочих групп и игре председателей специальным образом выражаются через трансверсальное значение и его потенциальную функцию. Поэтому, свойства трансверсального значения передаются функциям выигрышей игроков в описанных играх.

Вводится свойство пунктуальности устойчивого коалиционного разбиения. Такое свойство говорит о том, что любому игроку выгоднее сразу участвовать в формировании разбиения, чем потом присоединяться к наилучшей для себя коалиции. Свойство пунктуальности выполняется для трансверсального значения и изучено для описанных игр.

Показано приложение трансверсального значения при формировании рабочих групп и в задаче о назначении председателей. Отметим, что приложение трансверсальной гораздо шире. Они встречаются там, где агенты одной группы не могут получить выгоду или прибыль без агентов других групп. Если трансверсальное значение имеет физический смысл в некоторой области, тогда его можно использовать для моделирования рассматриваемого процесса.

Получены следующие результаты:

- Доказано, что в любой кооперативной игре существует коалиционная структура, которая одновременно устойчива по Нэшу, перестановочно-устойчива и Парето-оптимальна относительно трансверсального значения. Если значения характеристической функции неотрицательны, то коалиционная структура с тремя типами устойчивости так же является внешне-устойчивой.
- Для коалиционных структур, максимизирующих потенциальную функцию, вводится свойство пунктуальности. Показано, что такое свойство выполняется для трансверсального значения.
- Доказано существование Pareto-Nash устойчивой коалиционной структуры в игре формирования рабочих групп.

- Показано, что игра председателей это порядковая потенциальная игра. Изучено свойство пунктуальности устойчивого разбиения.

Существование коалиционной структуры, которая одновременно устойчива по Нэшу и перестановочно-устойчива гарантируется тем, что потенциальные функции для разных типов устойчивости совпадают. Подобный результат можно встретить в (Gusev, 2021)¹. В (Gusev, 2021) рассматриваются игры, в которых выигрыш игрока зависит от его коалиции, а трансверсальное значение таким свойством не обладает. Теоретико-игровые модели из (Gusev, 2021) и текущей работы не являются следствием друг друга. Более того, существует коалиционная структура с двумя типами устойчивости, которая является Парето-оптимальной относительно трансверсального значения. Если значения характеристической функции неотрицательны, то добавляется ещё один тип устойчивости. Для игр из (Gusev, 2021) такой сильный результат не выполняется.

Благодарность

Автор выражает благодарность Программе фундаментальных исследований НИУ ВШЭ за её поддержку. Исследование выполнено за счёт Российского научного фонда (грант № 22–21–20070), а также поддержано грантом Санкт-Петербургского научного фонда в соответствии с соглашением № 65/2022 от 15 апреля 2022 г.

¹Gusev, V. V. (2021). Nash-stable coalition partition and potential functions in games with coalition structure. *European Journal of Operational Research*, 295(3), 1180-1188.