Некоторые задачи коалиционного разбиения

Л. И. Жуков
НИУ ВШЭ - Санкт-Петербург

При выполнении какого-либо проекта участникам зачастую нужно выбрать свою роль, направление, профессию и т.п. Чтобы реализовать проект нужно фиксированное число агентов разных профессий. Например, для создания сайта нужен программист, дизайнер и менеджер, который работает с клиентом. В футбольной команде должен быть вратарь, нападающий, защитник. Возникает вопрос о том, какую профессию выбрать чтобы получить максимальный доход от реализации проекта, задания, игры.

Мы используем теоретико-игровые методы для решения проблемы формирования коалиций. Пусть $N = \{1, 2, ..., n\}$ это множество игроков и $M = \{1, 2, ..., m\}$ множество профессий. Дана матрица весов $W = (w_{ij})$ размером $n \times m$, где в w_{ij} это вес игрока i в профессии j. Будем считать, что все веса положительны и веса двух любых игроков для одной и той же профессии различны. Стратегия игрока – это выбор единственной профессии из множества M.

Игроки, которые выбрали одну и ту же профессию, упорядочиваются по весу. Далее, происходит формирование трансверсалей: в i-й трансверсали находятся все игроки, занимающие i-е место по весу в своей профессии.

Выигрыш определяется следующим образом. Если в трансверсали меньше m игроков, то каждый из тех кто состоит в этой трансверсали, получает 0. Если же в трансверсали m игроков, от они делят 1 пропорционально своим весам (в тех профессиях, которые они выбрали).

Наша цель найти устойчивое по Нэшу разбиение, то есть такое распределение игроков на профессии, что любому игроку не выгодно изменять свою профессию по одиночке.

Перечислим некоторые результаты:

1. Пусть $w_{ij} = f(a_i, b_j)$, где f это монотонная функция от a_i и b_j. Тогда существует устойчивое по Нэшу разбиение для любого фиксированного числа профессий. В частности, существует устойчивое разбиение для функций $f(a_i, b_j) = a_i + b_j$, $f(a_i, b_j) = a_i - b_j$, $f(a_i, b_j) = a_i * b_j$, $f(a_i, b_j) = a_i / b_j$ и других.

2. Пусть можно разбить игроков на 2 множества: $S_\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{[\frac{n}{2}]}\}$ и $S_\beta = \{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{[\frac{n+1}{2}]}\}$ так, что для любых $i \in [1; [\frac{n}{2}]], j \in [1; [\frac{n+1}{2}]]$ выполняется $\alpha_{ia} > \beta_{ja}$ и $\alpha_{ib} < \beta_{jb}$. Тогда существует устойчивое по Нэшу разбиение для двух профессий. В частности, существует устойчивое разбиение если веса "обратноупорядочены" , т.е. $w_{1A} > w_{2A} > ... > w_{nA}$, $w_{1B} < w_{2B} < ... < w_{nB}$.

3. Пусть можно разбить игроков на 2 множества: $S_\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{[\frac{n}{2}]}\}$ и $S_\beta = \{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{[\frac{n+1}{2}]}\}$ так, что для любых $i \in [1; [\frac{n}{2}]], j \in [1; [\frac{n+1}{2}]]$ выполняется $\alpha_{ia} > \beta_{ja}$ и $\alpha_{ib} > \beta_{jb}$. Тогда существует устойчивое по Нэшу разбиение для двух профессий. В частности, существует устойчивое разбиение если веса "прямоупорядочены" , т.е. $w_{1A} > w_{2A} > ... > w_{nA}$, $w_{1B} > w_{2B} > ... > w_{nB}$.