

Манипулируемость обобщённых скоринговых процедур агрегирования для случая 3 альтернатив

Иванов А.А.¹, Карабемян Д.С.¹, Якуба В.И.^{1,2}, Зонтов Ю.В.¹

¹Высшая школа экономики (НИУ ВШЭ, Москва)

²Институт Проблем Управления РАН (Москва)

Email: ivanovalexalex@gmail.com

Расширенная аннотация

Манипулирование – это ситуация, когда во время процедуры голосования участник вписывает в бюллетень неискренние предпочтения, чтобы достичь лучшего для себя исхода голосования. Было доказано в (Gibbard, 1973) и (Satterthwaite, 1975), что любая недиктаторская процедура голосования является манипулируемой. С тех пор возник вопрос: если неманипулируемой процедуры не существует, то какая процедура агрегирования будет являться наименее манипулируемой?

За 50 лет был опубликован целый ряд работ по исследованию степени манипулируемости различных процедур агрегирования: (Chamberlin, 1985), (Aleskerov, Kurbanov, 1999), (Pritchard, Wilson, 2007) и т.д. Чаще всего в таких работах рассматривались скоринговые процедуры агрегирования, то есть процедуры, когда каждая альтернатива в предпочтениях участников получала какое-то определённое количество баллов, после чего происходил подсчёт баллов.

Например, в Правиле относительного большинства лучшая альтернатива в предпочтениях участника получает 1 балл, остальные – 0 баллов. В правиле Борда для случая 3 альтернатив лучшая альтернатива получает 2 балла, вторая лучшая – 1 балл, худшая – 0 баллов. Побеждает альтернатива с самым высоким количеством баллов. Примеры других скоринговых процедур агрегирования: процедура Нансона, правило Хара, Одобряющее голосование $q=2$ и т.д.

Но что, если рассмотреть более широкий класс скоринговых правил? Под обобщёнными скоринговыми правилами будем подразумевать множество правил для случая 3 альтернатив, в которых:

1. Первая лучшая альтернатива в предпочтениях каждого участника получает 1 балл
2. Вторая лучшая альтернатива в предпочтениях получает λ баллов, где $0 \leq \lambda \leq 1$
3. Худшая альтернатива в предпочтениях получает 0 баллов

Можно видеть, что Правило относительного большинства, Одобряющее голосование с $q=2$, процедура Нансона, правило Хара, правило Борда будут являться частными случаями обобщённых скоринговых правил с разными λ .

В данной работе исследуется степень манипулируемости обобщённых скоринговых правил четырёх типов.

Первый тип: простой подсчёт баллов. Для каждой альтернативы высчитывается количество баллов, побеждает альтернатива с наибольшей суммой баллов.

Второй тип: подсчёт баллов, подсчёт среднего количество баллов, выбывание альтернатив, у которых сумма баллов меньше или равна среднему, повторение процедуры.

Третий тип: подсчёт баллов, подсчёт среднего количества баллов, выбывание альтернатив, у которых сумма баллов меньше среднего, повторение процедуры.

Четвертый тип: подсчёт баллов, выбывание альтернативы с наименьшим количеством баллов, повторение процедуры.

В качестве λ мы брали все возможные несокращаемые дроби со знаменателем не больше количества участников. Для случая 100 участников это более 3 тысяч различных значений. Кроме того, одна из гипотез заключалась в том, что минимальная манипулируемость может достигаться для некоторых типов процедур при λ чуть меньше или больше какой-то дроби. Поэтому помимо более чем 3000 дробей в качестве λ мы также брали и значение этих дробей за вычетом ϵ (очень маленького числа). Таким образом, суммарно получилось более 6 тысяч различных λ для каждого типа правила, то есть более 24000 различных процедур агрегирования.

Для оценки степени манипулируемости мы использовали компьютерное моделирование. Для случая 3...40 участников мы использовали модель генерации профилей, описанную в (Иванов, 2022), в которой генерируются все возможные профили как для Impartial Anonymous Culture, так и для Impartial Culture. Для случая 41...100 участников, так как общее количество профилей становилось слишком большим, мы использовали генерацию 1 миллиона случайных профилей.

В качестве оценки степени манипулируемости процедуры агрегирования мы использовали индекс Нитцана-Келли, введённый в (Nitzan, 1985) и (Kelly, 1993), а также индексы свободы и эффективности манипулирования, предложенные в (Aleskerov, Kurbanov, 1999).

В результате были получены индексы манипулируемости для 4 типов обобщённых скоринговых процедур с более чем 6000 различных весов для каждого типа процедуры. Подтвердилась гипотеза, что наименее манипулируемые процедуры – это не те процедуры, где вес второй альтернативы является каким-то «круглым» числом, например, 0 (Правило Относительного большинства), 0.5 (Правило Борда) или 1 (Одобряющее голосование с $q=2$), а имеют дробные значения λ . Примеры графиков и демонстрацию результатов планируется осуществить на конференции.

Литература

1. Aleskerov F., Kurbanov E. Degree of manipulability of social choice procedures // Alkan A. et al. (eds.) Current Trends in Economics. Studies in Economic Theory. Berlin Heidelberg, N.Y.: Springer, 1999. Vol.8. P.13-27.
2. Chamberlin J. R. An investigation into the relative manipulability of four voting systems // Behavioral Science. 1985. Vol.30(4). P.195–203.
3. Gibbard A. Manipulation of voting schemes // Econometrica. 1973. Vol. 41. P. 587–601.
4. Kelly J. Almost all social choice rules are highly manipulable, but few aren't // Social Choice and Welfare. 1993. Vol. 10. P. 161–175.
5. Nitzan S. The vulnerability of point-voting schemes to preference variation and strategic manipulation // Public Choice. 1985. Vol. 47. P. 349–370.
6. Pritchard G., Wilson M. Exact results on manipulability of positional voting rules // Social Choice and Welfare. 2007. Vol. 29. P. 487–513.
7. Satterthwaite M. Strategy-proofness and Arrow's conditions: existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions // Journal of Economic Theory. 1975. Vol. 10. P. 187–217.

8. Иванов А. А. (2022). Алгоритмы расчета точных значений индексов манипулируемости для случая трех альтернатив // Журнал Новой экономической ассоциации. № 5 (57). С. 14–23. DOI: 10.31737/2221-2264-2022-57-5-1

English version

On the Manipulability of Generalized Scoring Rules

Alexander Ivanov, Daniel Karabekyan, Vyacheslav Yakuba, Yury Zontov

Extended Abstract

Manipulation is a phenomenon when in voting an agent misrepresents his/her preferences to obtain a better result of the voting rule. It was proven in (Gibbard, 1973) and (Satterthwaite, 1975) that every non-dictatorial voting rule is manipulable. Thus, a question arises: can we find the least manipulable voting rule?

Since then, a lot of papers studying the degree of manipulability of voting procedures have been published: (Chamberlin, 1985), (Aleskerov, Kurbanov, 1999), (Pritchard, Wilson, 2007) etc. In most cases scoring rules were considered, i.e., voting rules, in which each alternative in agents' preferences gets some points, and the sum of points is calculated.

For example, in Plurality rule the 1-st best alternative gets 1 point, while the others get 0 points. Under Borda's rule for the case of 3 alternatives first best alternative gets 2 points, second best gets 1 point, third best gets 0 points. The alternative with the largest sum of points wins. Other examples of scoring rules: Nanson's procedure, Hare's procedure, Approval voting with $q=2$, etc.

What if we consider a wider class of such voting rules? We define generalized scoring rules as a set of voting rules for the case of 3 alternatives where

1. First-best alternative gets 1 point
2. Second-best alternative gets λ points, where $0 \leq \lambda \leq 1$
3. Worst alternative gets 0 points

It can be noticed, that Plurality rule, Approval voting with $q=2$, Nanson's procedure, Hare's procedure, Borda's rule are special cases of generalized scoring rules for some λ .

We consider 4 types of generalized scoring rules:

First type - simple scoring rule. For each alternative the sum of points is calculated, and the alternative with the highest sum wins.

Second type - the points for each alternative are calculated, the average number of points is calculated, alternatives with equal or less points than average are eliminated, and the procedure repeats.

Third type - the points for each alternative are calculated, the average number of points is calculated, alternatives with less points than average are eliminated, and the procedure repeats.

Fourth type - the points for each alternative are calculated, the alternative with the least number of points is omitted and the procedure repeats.

We consider all possible values of λ which can be represented as a fraction with the denominator less or equal to 100. For the case of 100 agents there are more than 3000 such cases. One of the ideas was

that minimal manipulability is reached when λ is not a «round» or trivial number, but a certain fraction. Additionally, we considered all possible fractions minus epsilon as λ . As a result, we consider more than 6000 possible values for each of 4 types of rules, i.e., we considered more than 24000 different voting rules.

To evaluate the degree of manipulability of voting rules for the cases of 3...40 agents we use the approach described in (Ivanov, 2022), when all possible profiles are generated for the cases of Impartial Anonymous Culture and Impartial Culture. For the cases 41...100 agents we generate 1 million random profiles.

To compare the degrees of manipulability of voting rules we use Nitzan-Kelly index introduced in (Nitzan, 1985) and (Kelly, 1993), as well as freedom of manipulability indices and efficiency of manipulability indices introduced in (Aleskerov, Kurbanov, 1999).

As a result, we calculated manipulability indices for 4 types of generalized scoring rules for more than 6000 different weights of the second alternative. It can be seen from the results, that the least manipulable procedures are not the ones with trivial values of λ , but with some not-trivial fractions as λ . The detailed results will be presented at the conferences

References

1. Aleskerov F., Kurbanov E. Degree of manipulability of social choice procedures // Alkan A. et al. (eds.) Current Trends in Economics. Studies in Economic Theory. Berlin Heidelberg, N.Y.: Springer, 1999. Vol.8. P.13-27.
2. Chamberlin J. R. An investigation into the relative manipulability of four voting systems // Behavioral Science. 1985. Vol.30(4). P.195–203.
3. Gibbard A. Manipulation of voting schemes // Econometrica. 1973. Vol. 41. P. 587–601.
4. Kelly J. Almost all social choice rules are highly manipulable, but few aren't // Social Choice and Welfare. 1993. Vol. 10. P. 161–175.
5. Nitzan S. The vulnerability of point-voting schemes to preference variation and strategic manipulation // Public Choice. 1985. Vol. 47. P. 349–370.
6. Pritchard G., Wilson M. Exact results on manipulability of positional voting rules// Social Choice and Welfare. 2007. Vol. 29. P. 487–513.
7. Satterthwaite M. Strategy-proofness and Arrow's conditions: existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions // Journal of Economic Theory. 1975. Vol. 10. P. 187–217.
8. A.Ivanov (2022). Algorithms for evaluation of exact values of the manipulability indices. // Journal of New Economic Association (in Russian). № 5 (57). C. 14–23. DOI: 10.31737/2221-2264-2022-57-5-1