

Выделение сезонности и трендов ВВП по его использованию методом редукции пространства состояний

А.О. Беляков, Банк России*,
А.Н. Курбацкий, МШЭ МГУ им. М. В. Ломоносова
Н.В. Артамонов, МГИМО МИД России

19 января 2025

1 Представление в пространстве состояний

В общем случае авторегрессионная система¹ может быть представлена в пространстве состояний следующим образом

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= \mathbf{A} \cdot x_t + \mathbf{K} \cdot \varepsilon_t, \\ y_t &= \mathbf{C} \cdot x_t + \varepsilon_t,\end{aligned}$$

где x_t – ненаблюдаемый вектор $k \times 1$ переменных состояний,
 y_t – вектор $l \times 1$ наблюдаемых величин,
 ε_t – эргодический строго стационарный процесс:

$$\mathbf{E}\{\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}\} = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{E}\{\varepsilon_t \varepsilon'_t | \mathcal{F}_{t-k}\} = \Omega_0 = \mathbf{E}\varepsilon_t \varepsilon'_t > 0,$$

$$\mathbf{E}\varepsilon_{t,j}^4 < \infty, \quad j = 1, \dots, s,$$

где $\mathcal{F}_t = \sigma\{\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots\}$ и $\varepsilon_{t,j}$ означает j -ую компоненту вектора ε_t , Вауер (2008).

Пренебрегая ε_t

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= \mathbf{A} \cdot x_t, \\ y_t &= \mathbf{C} \cdot x_t,\end{aligned}$$

* Доклад отражает личную позицию авторов. Содержание и результаты данного исследования не следует рассматривать, в том числе цитировать в каких-либо изданиях, как официальную позицию Банка России или указание на официальную политику или решения регулятора. Любые ошибки в данном материале являются исключительно авторскими.

¹Эквивалентно ARMA представлению, см. 4.2 в Aoki (1987).

где x_t – ненаблюдаемый вектор $k \times 1$ переменных состояния,
 y_t – вектор $l \times 1$ наблюдаемых величин.

Матрица Ганкеля записывается следующим образом

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \\ y_2 & y_3 & \dots & y_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n & y_{n+1} & \dots & y_{n+m-1} \end{pmatrix} = \mathbf{\Gamma}_{1:n} \cdot \mathbf{\Omega}_{1:m}$$

и выражается через матрицы наблюдаемости $\mathbf{\Gamma}_{1:n}$ и управляемости $\mathbf{\Omega}_{1:m}$:

$$\mathbf{\Gamma}_{1:n} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}^{n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Omega}_{1:m} = \begin{pmatrix} x_1 & \mathbf{A} \cdot x_1 & \dots & \mathbf{A}^{m-1} \cdot x_1 \end{pmatrix},$$

где $n = \lceil \frac{T}{2} \rceil$, $m = T - n + 1$.

Метод Кунга [1] выделения подпространства состояний использует сингулярное разложение матрицы Ганкеля

$$\mathbf{H} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{V}',$$

где $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ – ортогональные матрицы, а диагональная матрица $\mathbf{S}$ содержит действительные положительные (сингулярные) числа на диагонали в убывающем порядке, соответствующие главным компонентам.

Можно выделить из этих матриц компоненты, соответствующие, как мы полагаем, полезному сигналу. Например возьмём первые k главных компонент:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{1:k} & \mathbf{U}_{k+1:n} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{1:k} & \mathbf{V}_{k+1:n} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{1:k} & 0 \\ 0 & \mathbf{S}_{k+1:n} \end{pmatrix}.$$

Откуда можем восстановить очищенный сигнал $\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{U}_{1:k} \cdot \mathbf{S}_{1:k} \cdot \mathbf{V}_{1:k}'$, найти из оценки $\hat{\mathbf{\Gamma}}_{1:n} = \mathbf{U}_{1:k} \cdot \mathbf{S}_{1:k}$ методом наименьших квадратов матрицу $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{\Gamma}_{1:n-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{\Gamma}_{2:n} \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{\Gamma}}_{1:n-1}^+ \cdot \hat{\mathbf{\Gamma}}_{2:n},$$

и с $\hat{\mathbf{\Omega}}_{1:m} = \mathbf{V}_{1:k}'$ предсказать тренд будущего сигнала на h периодов

$$\bar{y}_{T+h} = \mathbf{\Gamma}_n \cdot \mathbf{A}^h \cdot \mathbf{\Omega}_m.$$

2 Пример: ВВП по использованию в текущих ценах

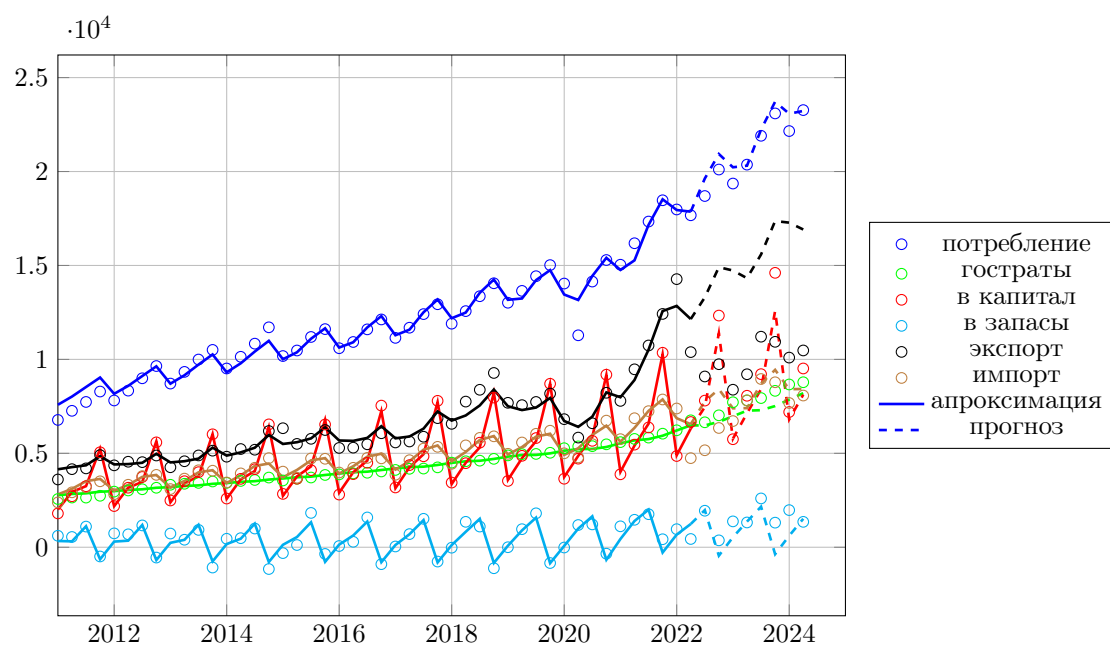


Рис. 1: Главные компоненты: 1 2 3 4 5

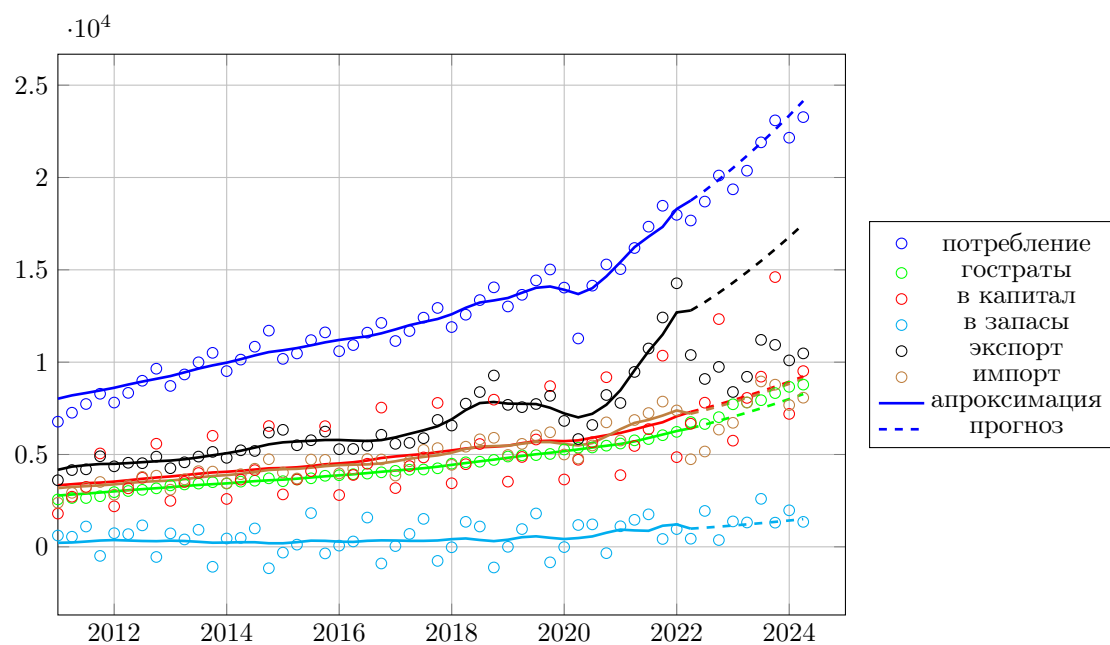


Рис. 2: Главные компоненты: 1 5 7 10

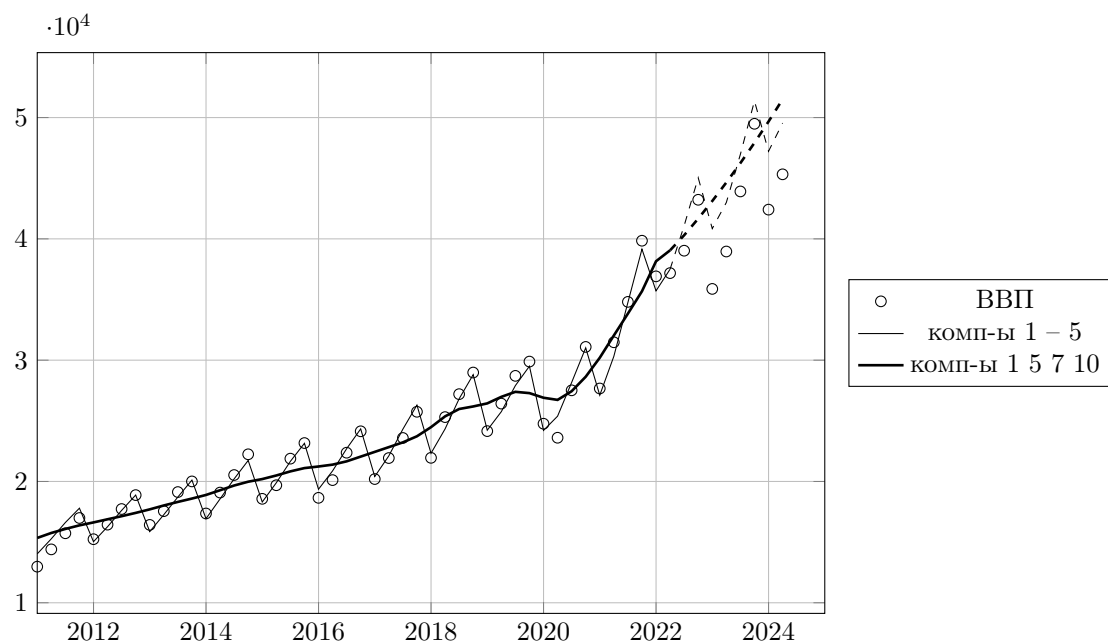


Рис. 3: Номинальный ВВП, сложенный из его использования

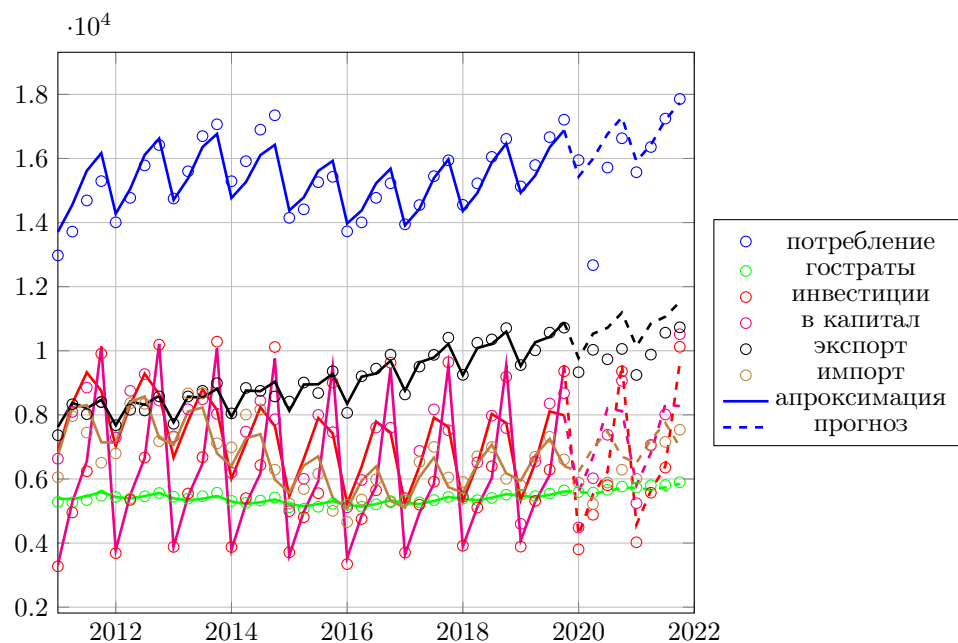


Рис. 4: Использование ВВП в ценах 2021г. Главные компоненты: 1 2 3 4 5

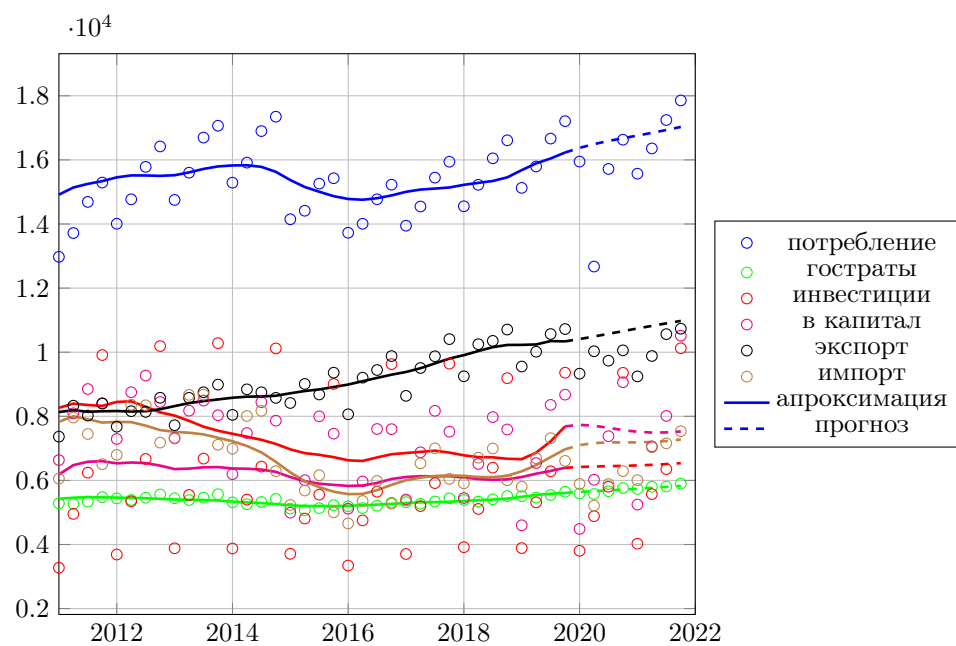


Рис. 5: Главные компоненты: 1 5 7 10

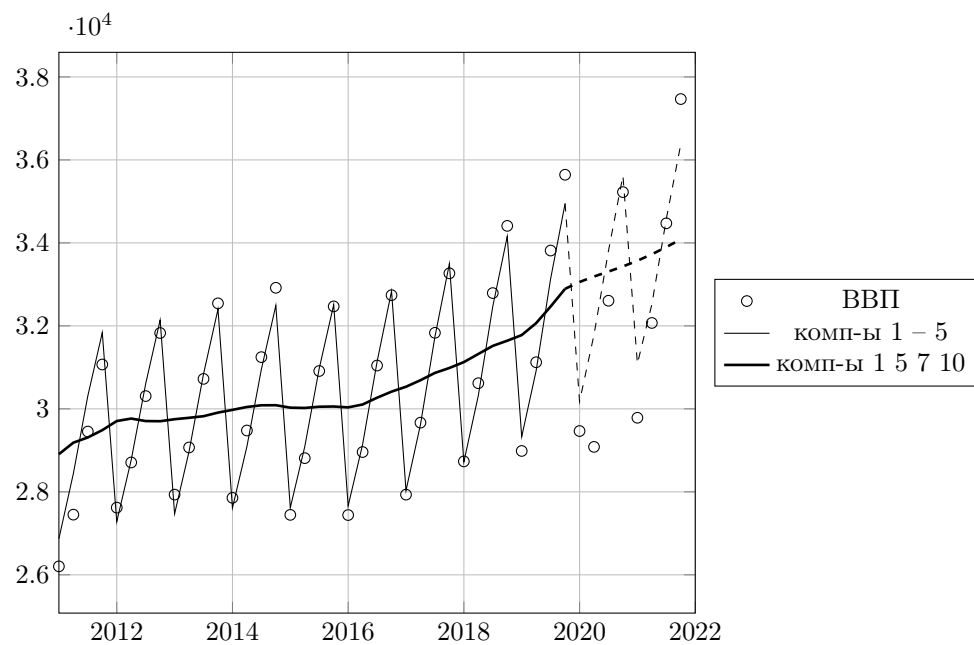


Рис. 6: ВВП в ценах 2021г., сложенный из его использования

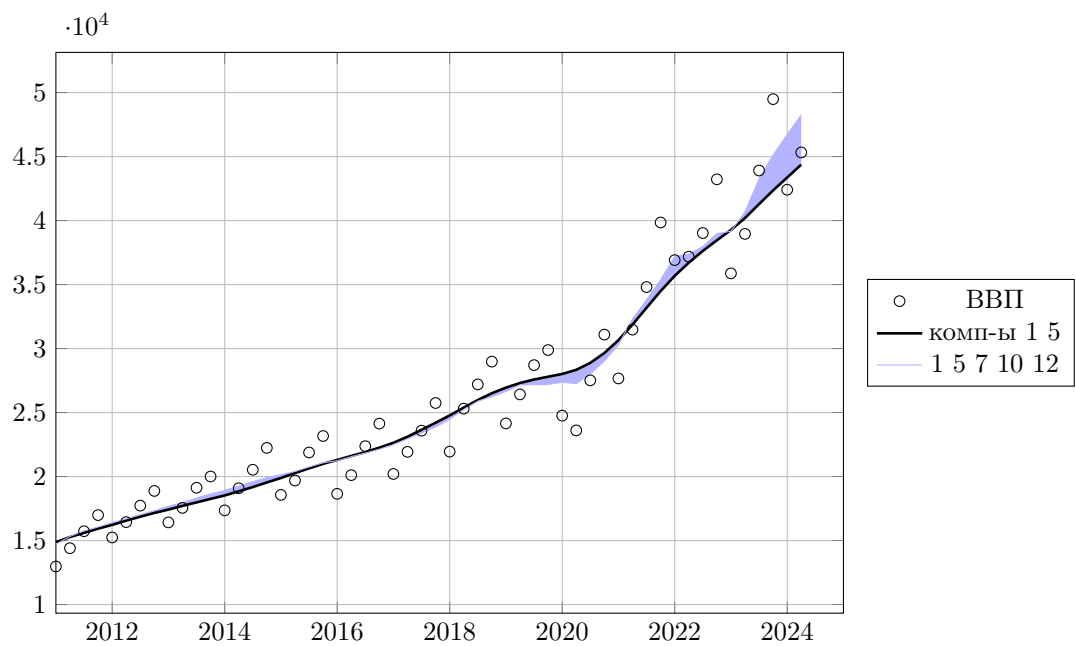


Рис. 7: Номинальный разрыв ВВП

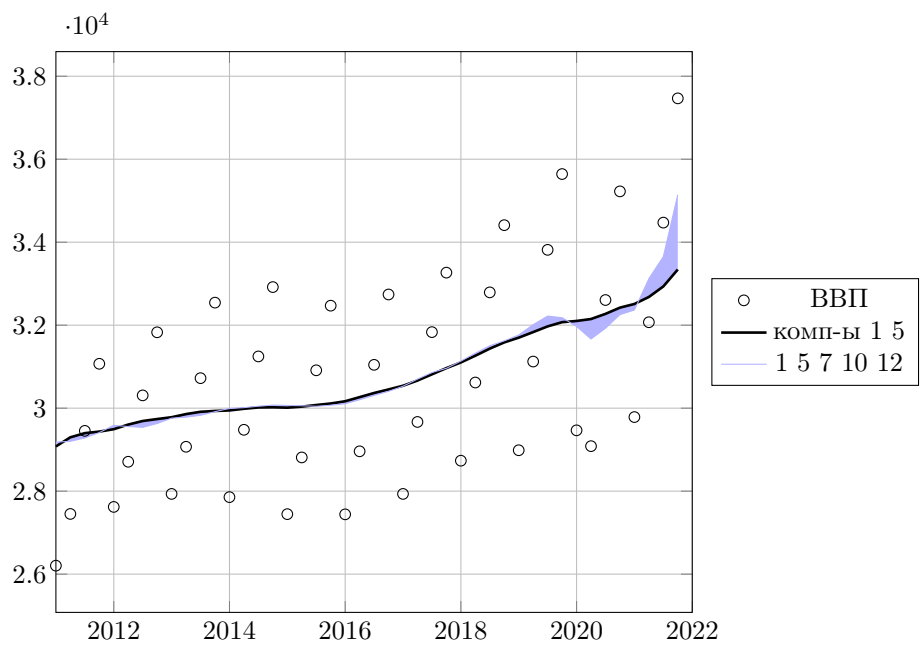


Рис. 8: Разрыв ВВП в ценах 2021г.

3 Выводы

1. При помощи метода Кунга выделения подпространства состояний можно сглаживать многомерный ряд макропеременных, устраняя главные компоненты, связанные с периодами характерными для сезонности.
2. Можно экстраполировать ряд на следующие периоды и, складывая его компоненты, получать прогноз ВВП.
3. Можно оценить разрыв выпуска по компонентам, не включающими сезонность и тренд.
4. Сравнение метода с эконометрическими моделями показывает высокие прогнозные свойства.

Список литературы

- [1] Kung, S.K. (1978) A new low-order approximation algorithm via singularvalue decomposition. Proc. 29th Asilomar Conf. on Circuits, Systemsand Computers, pp. 705–714
- [2] Maciejowski, J. and Vines, D. (1984), Decoupled control of a macroeconomic model using frequency-domain methods Journal of Economic Dynamics and Control, vol. 7, pp. 55-77. [https://doi.org/10.1016/0165-1889\(84\)90048-4](https://doi.org/10.1016/0165-1889(84)90048-4)
- [3] N.M. Christodoulakis (1989), Extensions of linearisation to large econometric models with rational expectations Computers & Mathematics with Applications, Volume 18, Issues 6–7, pp. 629-642. [https://doi.org/10.1016/0898-1221\(89\)90113-2](https://doi.org/10.1016/0898-1221(89)90113-2)
- [4] Aoki M. (1987). State Space Modeling of Time Series. Springer-Verlag, Berlin.
- [5] Bauer D. (2008), Using Subspace Methods for Estimating ARMA Models for Multivariate Time Series with Conditionally Heteroskedastic Innovations Econometric Theory 24(4).
- [6] Anton Belyakov, Aleksei Kurbatskii, Artur Sidorenko (2024) A State Space Filtering-Based Approach for Price Prediction Advances in Systems Science and Applications 23(4). pp. 8–17. doi: 10.25728/assa.2023.23.04.1492
- [7] Golyandina, N. (2020). Particularities and commonalities of singular spectrum analysis as a method of time series analysis and signal processing. Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics, 12(4), e1487.